

DANIEL VASCONCELOS RODRIGUES ALVES

**Implementação de um código computacional com elementos
tridimensionais para análise da interação dinâmica solo-estrutura**

Área de concentração:
Engenharia de Petróleo

Orientador:
Prof. Dr. Ronaldo Carrion

São Paulo
2017

DANIEL VASCONCELOS RODRIGUES ALVES

**Implementação de um código computacional com elementos finitos
tridimensionais para análise da interação dinâmica solo-estrutura**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do bacharelado em engenharia de petróleo.

Área de concentração:
Engenharia de Petróleo

Orientador:
Prof. Dr. Ronaldo Carrion

São Paulo
2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, que me apoiaram durante minha formação.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que me apoiaram durante todas as fases de minha vida, inclusive durante minha graduação.

Ao Programa de Recursos Humanos da Poli USP e a Agência Nacional de Petróleo, pelo financiamento deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ronaldo Carrion, pelo apoio e conhecimento fornecido durante este trabalho.

A todos os professores e funcionários da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, que fizeram parte da minha jornada universitária.

RESUMO

O presente estudo analisa uma das aplicações do Método dos Elementos finitos (MEF) dentro da mecânica dos sólidos, sendo que o objetivo é criar um programa que realiza análise tridimensional de problemas dinâmicos da interação solo-estrutura, como por exemplo, a interação de um *riser* com o solo, no domínio da frequência. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é usado para aproximar a solução de equações diferenciais, seu princípio consiste em discretizar o sistema em pequenos subdomínios (elementos finitos), identificando os graus de liberdade e relacionando cada nó da maneira adequada. As técnicas existentes para simular a interação do solo em um meio tridimensional exigem um grande processamento de dados, sendo, portanto esperado que seja utilizado um modelo numérico computacional como a melhor solução para o problema. No presente estudo foi escolhido o programa MATLAB®, já que é um software atende aos requisitos de alto processamento de simulações numéricas de forma eficiente. Os resultados analíticos obtidos para a estrutura sem o solo indicam uma boa confiabilidade do programa, que quanto maior o refinamento da malha, mais próximo o resultado numérico chega do analítico. Em relação ao acoplamento do solo, é percebido um amortecimento dos deslocamentos, além da redução do valor da frequência natural.

Palavras Chave: Elementos Finitos. Solo. Amortecimento. Tridimensional. Análise Dinâmica.

ABSTRACT

The present study analyzes one of the applications of the Finite Element Method (FEM) in Solid Mechanics. The objective is to create a program that performs three-dimensional analyzes of dynamic problems of soil-structure interaction, such as the interaction of a riser with the ground, in the frequency domain. The Finite Element Method (FEM) is used to approximate the solution of differential equations and its principle is to discretize the system in small subdomains (finite elements), identifying the degrees of freedom and relating each node in the proper way. The existing techniques to simulate soil interaction in a three-dimensional environment require a large data processing, so it is expected that a computational numerical model will be used as the best solution to the problem. In the present study the MATLAB® program was chosen, since it is a software that meets the requirements of high numerical simulations efficiently. The analytical results obtained for the structure without soil indicate a good reliability of the program, that the greater the refinement of the mesh, the closer the numerical result comes from the analytic. In relation to the coupling of the soil, it is perceived a damping of the displacements, besides the reduction of the value of the natural frequency.

Keywords: Finite Elements. Soil. Damping. Three-dimensional. Dynamic analysis.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	7
2	OBJETIVO.....	9
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	10
4	MATERIAIS E MÉTODOS.....	12
4.1	ANÁLISE DINÂMICA.....	12
4.2	ANÁLISE DE UM SISTEMA SEM AMORTECIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	15
4.3	ANÁLISE DE UM SISTEMA COM AMORTECIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	16
4.4	ELEMENTO TETRAÉDRICO LINEAR.....	16
4.5	MATRIZ DE RIGIDEZ.....	17
4.6	MATRIZ DE MASSA.....	18
4.7	ORGANIZAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA.....	19
4.8	INCORPORAÇÃO DO SOLO.....	20
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	23
6	CONCLUSÕES.....	33
7	REFERÊNCIAS.....	34

1 INTRODUÇÃO

Projetos ou problemas de engenharia são mais bem sucedidos na sua execução quanto mais se tem o entendimento do comportamento físico dos materiais e estruturas que os compõem. Segundo Kim (2011) para facilitar este entendimento, são criados modelos matemáticos aproximados que resultam em diversos tipos de equações, as quais, por sua vez, raramente podem ser solucionadas de uma forma fechada, isto é, exata. A fim de resolvê-las de maneira aproximada, são utilizados métodos numéricos entre os quais se destaca o Método dos Elementos Finitos (MEF), amplamente estudado e com excelentes resultados.

No âmbito da Mecânica dos Sólidos, este método é usado para aproximar a solução de equações diferenciais e seu princípio consiste em discretizar o sistema em pequenos subdomínios (elementos finitos), identificando os graus de liberdade de cada nó. Assim, é possível formular as equações que descrevem o comportamento de todos os nós de cada elemento finito e definir o sistema de equações locais. Vaz (2011) indica que posteriormente, podem-se compor os sistema de equações globais e resolvê-lo, obtendo os valores das incógnitas associadas aos graus de liberdade desconhecidos. Como o método utiliza soluções aproximadas, em geral, à medida que se diminui o tamanho de cada elemento finito (aumentando assim a quantidade desses elementos no sistema), mais precisa se torna a solução, convergindo para a solução exata.

Segundo Carrion (2012), existem três abordagens para se obter as equações de elementos finitos de um sistema: método direto, método variacional e método dos resíduos ponderados. Cada um deles possui suas vantagens e limitações. Neste trabalho será utilizada a abordagem do método dos resíduos ponderados, que consiste em aproximar as soluções das equações gerando um erro (ou resíduo) inerente à formulação. Então, este resíduo deve ser ponderado através de uma função (ponderadora), a qual pode ser de várias formas. Aqui será utilizada a forma de Galerkin.

De acordo com Rao (2008), sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincidir com a frequência da excitação externa, ocorre um fenômeno chamado ressonância. Temos diversos exemplos de danos a estruturas causados por ressonância e vibração excessiva na literatura. Devido aos

prejuízos causados por essas falhas é extremamente importante conhecer a estrutura, e entender como amortecer a frequência natural de vibração para evitar o colapso.

Segundo Chakrabarti (1987), uma estrutura offshore pode ser considerada livre para se mover em ondas. Tal estrutura deve ser conectada ao solo por algum meio mecânico, e geralmente os graus de liberdade são restringidos dados os tipos de conexão com o solo. O termo axial X pode ser considerado a sobre-tensão, os termos transversais Y e Z podem ser o hasteamento, oscilações e balanços provenientes das ondas. Exemplos de estruturas que requerem tal análise de movimento são: torres articuladas, petroleiros ancorados, semisubmersíveis, *risers* entre outros. Para calcularmos a distribuição de tensões devemos conhecer os deslocamentos da estrutura, isso requer cálculos de deslocamentos a partir de equações não lineares que necessitam de técnicas como por exemplo, o Método dos Elementos Finitos, para que uma solução seja obtida.

O presente estudo se insere em um contexto onde autores criaram modelos numéricos sobre a interação solo/estrutura apenas em duas dimensões, outras pesquisas avaliaram as estruturas em três dimensões porém sem contar com a interação do solo/estrutura. Este trabalho visa conciliar a análise estrutural tri-dimensional com a interação do solo/estrutura através de um código computacional.

2 OBJETIVO

O objetivo deste estudo foi avaliar a análise dinâmica da interação solo – estrutura aplicada a problemas tridimensionais e comprovando o amortecimento a partir do solo, através de um código MATLAB®. Realizando a implementação numérica da estrutura por meio do método dos elementos finitos, particularmente o elemento tetraédrico de quatro nós e o acoplamento do solo na estrutura.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O método dos elementos finitos é um método de aproximação que pode ser usado para calcular tensões, movimentos de cargas e forças, deslocamentos, transferência de calor e outros comportamentos físicos básicos ao usar diagramas de matriz e malha muito grandes. Nos últimos anos, o método dos elementos finitos tem sido usado para obter as soluções para uma variedade de problemas de engenharia. Algumas aplicações de modelagem de elementos finitos que foram utilizadas para pesquisa de engenharia são posteriormente apresentadas.

Li et al. (2001) apresentaram um elemento finito quadrático com graus de liberdade generalizados (GDOF), considerando o princípio de que os campos de deslocamento local dos elementos são compatíveis com o campo de deslocamento global dos sistemas correspondentes, essa abordagem dos deslocamentos é particularmente interessante, e será utilizada no presente estudo.

Neste trabalho, foi desenvolvido um campo de deslocamento global com base em funções quadráticas de deslocamento local para os elementos. Portanto, formando modelos para elementos finitos correspondentes ao GDOF reorganizando os campos de deslocamento local de elementos para serem compatíveis com os campos de deslocamento global correspondentes. Em seu estudo, foram fornecidos vários exemplos numéricos para autenticidade, simplicidade e versatilidade do elemento e da viga na análise de estruturas de paredes finas.

No presente estudo, iremos validar o modelo criado aplicando em um exemplo de barra um carregamento axial e transversal em sua extremidade livre. Li et al (2001) também determinaram que o elemento finito com GDOF podem lidar com inconvenientes na análise de vigas, placas e outras estruturas quando a espessura muda. Além de lidar com esses problemas, os autores também determinaram que o MEF deu um resultado semelhante com menos graus de liberdade em relação às soluções tradicionais de elementos finitos.

Kiral et al. (2008) apresentaram uma viga laminada simétrica fixa que foi submetida a uma força concentrada aplicada a uma velocidade constante para determinar o comportamento dinâmico dessa estrutura. Os autores usaram a teoria clássica da laminação para criar um modelo de elementos finitos tridimensional.

Além disso, o método de integração do Newmark para calcular o comportamento dinâmico foi implementado no MATLAB®, que também é escolha desse trabalho. A ampliação dinâmica é definida como a relação entre os deslocamentos dinâmico e estático e é obtida para diferentes velocidades de carga e orientações das camadas. Os resultados relatados neste artigo mostram que a velocidade da carga e a orientação da camada têm um efeito significativo na resposta dinâmica.

Bozdogan et al. (2009) demonstraram um método aproximado baseado na metodologia de abordagem contínua e transferência de matriz para análises estáticas e dinâmicas de paredes de cisalhamento acopladas a múltiplos compartimentos. Os autores assumiram o sistema de vigas como umas estruturas de materiais compósitos, assim, escreveram a equação diferencial cuja solução deu as funções de forma para cada instante de tempo. Ao usar condições de contorno que são obtidas por essas funções de forma, os modos de sistema e os períodos podem ser calculados. Um programa de computador foi desenvolvido em MATLAB® e amostras numéricas foram resolvidas para demonstrar a confiabilidade desse método. Os resultados foram comparados com dados existentes na literatura obtendo boa correlação. Os autores sugeriram que seu método é apropriado para usar em uma ampla gama de aplicações de sistemas estruturais.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Para realizar as atividades do projeto, foi necessário um estudo da análise dinâmica, sem e com amortecimento no domínio da frequência, além da estruturação do elemento tetraédrico. Para a estrutura foram desenvolvidas as matrizes de rigidez e massa assim como a organização dos dados de entrada. Por fim foi realizado o acoplamento do solo. Tais processos serão mais detalhados a seguir.

4.1 ANÁLISE DINÂMICA

Segundo Rao (2008) para realizarmos a dedução das equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade utilizando a segunda lei de Newton devemos seguir os seguintes procedimentos: determinação das coordenadas, configuração do sistema em equilíbrio, desenhar um diagrama de corpo livre e por fim aplicar a segunda lei de Newton.

O primeiro passo, determinar as coordenadas adequadas para descrever as posições das várias massas pontuais e corpos rígidos no sistema, considera as direções positivas adequadas para os deslocamentos, velocidades e aceleração das massas e corpos rígidos.

O segundo passo, determinar a configuração do sistema em equilíbrio estático e medir os deslocamentos das massas e corpos rígidos em relação às suas respectivas posições em equilíbrio estático.

O terceiro passo, desenhar o diagrama de corpo livre de cada massa ou corpo rígido no sistema, de maneira a indicar a mola, o amortecimento e as forças externas que agem sobre cada massa ou corpo rígido quando são inseridos deslocamento e velocidade positivos a massa ou corpo rígido.

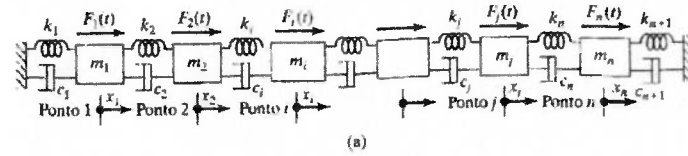
E por fim, a segunda lei do Movimento de Newton deve ser aplicada a cada massa ou corpo rígido mostrado pelo diagrama de corpo livre como na Eq. 1:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_j F_{ij} \text{ (para a massa } m_i) \quad (1)$$

Deduzindo as equações de movimento do sistema massa-mola amortecedor, conforme a Figura 1 e o diagrama de corpo livre de massa m_i , conforme a Figura 2, temos a seguinte situação mostrada na Eq. 2:

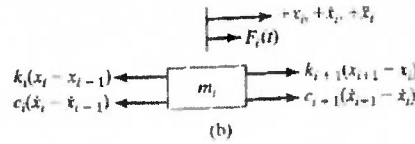
$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_i - x_{i-1}) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + F_i; i = 2, 3, 4, \dots, n-1 \quad (2)$$

Figura 1- Sistema massa-mola amortecedor



(Fonte: Rao, 2008)

Figura 2 – Diagrama de corpo livre de massa m_i



(Fonte: Rao, 2008)

As equações de movimento das massas m_i e m_n podem ser deduzidas da Eq. 2, fazendo $i = 1$ juntamente com $x_0 = 0$ e $i = n$ juntamente com $x_{n+1} = 0$, respectivamente gerando a Eq. 3.

$$m_1 \ddot{x}_1 - \dot{x}_1(k_i + k_2) - k_2 x_2 + \dot{x}_1(c_i + c_2) - c_2 \dot{x}_2 = F \quad (3)$$

As Eq. 2 e Eq. 3 podem ser expressas na forma matricial como mostrada na Eq. 4:

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [C]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F} \quad (4)$$

Em que $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as denominadas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e \vec{x} , $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ e \vec{F} são os vetores de deslocamento, velocidade, aceleração e carregamento externo, respectivamente, dados por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3+c_4) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (c_n+c_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3+k_4) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (k_n+k_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix} \quad \ddot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix}$$

O sistema massa-mola-amortecedor considerado anteriormente é um caso particular de um sistema geral massa-mola-amortecedor com n graus de liberdade. Em sua forma mais geral, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são dadas por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Com $m_{ij} = m_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$ e $k_{ij} = k_{ji}$.

4.2 ANÁLISE DE UM SISTEMA SEM AMORTECIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

No domínio do tempo, a equação do movimento de um sistema sem amortecimento escrito na forma matricial é dado a seguir pela Eq. 5:

$$[M]\ddot{\vec{x}}(t) + [K]\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \quad (5)$$

Propondo-se uma solução mostrada na Eq. 6:

$$\vec{x}(t) = \pm \cos(\omega t) = \text{Re}[\bar{x}e^{i\omega t}] \quad (6)$$

Temos, as Eq. 7, 8, 9:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \text{Re}[i\omega\bar{x}e^{i\omega t}] \quad (7)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \text{Re}[-\omega^2\bar{x}e^{i\omega t}] \quad (8)$$

$$\vec{F}(t) = \text{Re}[\bar{F}\bar{x}e^{i\omega t}] \quad (9)$$

Em que $i = \sqrt{-1}$, ω é a frequência de excitação da estrutura, \bar{x} é o vetor com as amplitudes dos deslocamentos e \bar{F} é o vetor formado pelas amplitudes dos esforços externos.

Substituindo as Eq. 7, 8 e 9 na Eq. 4 e fazendo os devidos ajustes, chega-se na Eq. 10:

$$\{[K] - \omega^2[M]\}.\bar{x} = \bar{F} \quad (10)$$

Como a Eq. 10 é um sistema linear pode-se realizar a análise Função de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura, onde cada frequência ω obtém um novo vetor deslocamento \bar{x} . Analisando, portanto, como o do deslocamento varia em função da frequência e gerar uma análise gráfica. A análise verificará assim quais os valores de ω que ocorrem picos de deslocamentos, identificando, portanto a frequência natural da estrutura.

4.3 ANÁLISE DE UM SISTEMA COM AMORTECIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Em muitos casos, a influência do amortecimento sobre a resposta de um sistema vibratório é insignificante e pode ser desprezada. Todavia, o efeito do amortecimento deve ser considerado se a resposta do sistema for exigida durante um período relativamente grande e também se a frequência de excitação for a mesma ou estiver próxima das frequências naturais do sistema.

Segundo Rao (2008), por simplicidade, será considerado um sistema especial para o qual a matriz de amortecimento pode ser expressa pela Eq. 11 como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (11)$$

Em que α e β são constantes. Esse tipo de amortecimento é conhecido como *amortecimento proporcional* porque $[C]$ é proporcional à combinação linear de $[M]$ com $[K]$.

Substituindo as Eq. 11, 7, 8 e 9 na Eq. 5 e fazendo os devidos ajustes chega-se na Eq. 12.

$$\{[K] - \omega^2[M] + \omega(\alpha[M] + \beta[K])i\} \bar{x} = \bar{F} \quad (12)$$

Em que $\{[K] - \omega^2[M] + \omega(\alpha[M] + \beta[K])i\}$ é a Matriz de Impedância do sistema, $S(\omega)$.

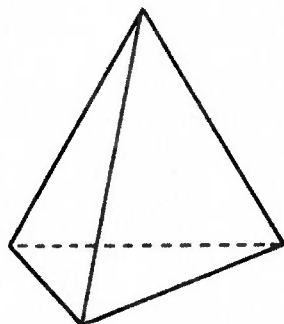
Merece destaque, também, o fato de que todas as variáveis utilizadas nesta etapa do trabalho devem ser complexas. Fisicamente, isso pode ser explicado pelo fato de o amortecedor ser um dissipador de energia e não um elemento conservativo (como os elementos de mola).

4.4 ELEMENTO TETRAÉDRICO LINEAR

Uma estrutura modelada de maneira contínua é resolvida com equações diferenciais parciais, difíceis de serem resolvidas e muitas vezes sem solução analítica. Para solucionar isto, usamos uma modelagem discreta, onde as equações são equações diferenciais ordinárias, relativamente mais fáceis de serem resolvidas. Entretanto é esperado que a solução discretizada não seja tão precisa quanto a uma solução contínua, em que deve-se pesar a finalidade da análise, a capacidade de processamento e o tempo disponível para o cálculo

Segundo Soriano (2009), o elemento tetraedro linear é o mais simples elemento tridimensional usado na análise de problemas sólidos mecânicos. Este elemento tem quatro nós, em que cada nó tem três graus de liberdade de translação nas direções nodais x , y e z . Um elemento tetraedro linear típico é mostrado na Figura 3.

Figura 3 - Representação de um elemento tridimensional genérico (4 nós)



4.5 MATRIZ DE RIGIDEZ

De acordo com Bittencourt, (2010), a matriz de rigidez de um elemento pode ser expressa pela Eq. 13.

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (13)$$

Onde temos que:

$[B]$: Matriz de deformação do elemento

$[D]$: Matriz de elasticidade

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{6 Vol} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix};$$

Em que os coeficientes b_i , c_i e d_i são dados por:

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix};$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix};$$

$$d_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix};$$

Analisando as matrizes $[B]$ e $[D]$ percebemos que dadas as coordenadas x , y e z dos quatro nós do elemento tetraédrico e dado o Módulo de Elasticidade E e o Coeficiente de Poisson ν do material do elemento, tais matrizes são matrizes constantes. Dessa maneira a integração da matriz de rigidez torna-se trivial, permitindo reescrever a matriz de rigidez como mostrada na Eq. 14:

$$[K_e] = [B]^T [D] [B] Vol \quad (14)$$

4.6 MATRIZ DE MASSA

Para a construção da matriz de massa concentrada seguiremos o mesmo raciocínio já tomado e dividiremos a massa entre os quatro nós do elemento tetraédrico linear chegando na seguinte expressão:

$$[M] = \frac{\rho Vol}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.7 ORGANIZAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA

De acordo com Hughes (2000), para definirmos a matriz $[K]$ global e o vetor F , precisamos especificar e correlacionar os arranjos lógicos entre os nós locais e os nós globais ordenando-os em três tipos de matrizes: ID, IEN, LN. A seguir será detalhado o funcionamento das matrizes, e no anexo, um exemplo tridimensional será apresentado para melhor entendimento do problema.

ID: É conhecida como a matriz de destino. Onde “i” é o grau de liberdade, “A” o nó global e P o número da equação global. Esta matriz relaciona os nós globais, com os respectivos graus de liberdade, criando uma relação global no sistema. Sua função é representada pela Eq. 15:

$$ID(i, A) = P. \quad (15)$$

No caso de nosso problema tridimensional existem 4 nós para cada elemento, assim como cada nó tem a liberdade de se locomover em 3 direções.

Caso não possua condição de contorno, a matriz será preenchida do número 1 até o número de nós.

Caso possua condição de contorno, a matriz será preenchida de forma nula para o P.

IEN: Esta matriz relaciona cada elemento, com seus respectivos nós locais. Onde “a” é o nó local do elemento e “e” é o número local do elemento. De forma que cada um dos tetraedros representando cada elemento, possui 4 nós locais. Sua função é representada pela seguinte relação mostrada pela Eq. 16:

$$IEN(a,e) = A. \quad (16)$$

Esta matriz não é afetada pelas condições de contorno.

LM: Esta matriz é a junção das matrizes ID com IEN. Onde “i” é o grau de liberdade, “a” o nó local e “e” o número do elemento. Ela posiciona cada número do elemento “e” num sistema global. Esta matriz é tridimensional, relacionando todos os atributos inseridos nas matrizes anteriores. Sua função é representada pela Eq. 17:

$$LM(i,a,e) = ID(i, IEN(a,e)) \quad (17)$$

A partir desse arranjo é possível construir a matriz de rigidez global K e também o vetor carregamento global F utilizando os algoritmos representados respectivamente pelas Equações 18 e 19:

$$K[LM(i,a,e), LM(i,a,e)] = K[LM(i,a,e), LM(i,a,e)] + k^e \quad (18)$$

$$F[LM(i,a,e), LM(i,a,e)] = F[LM(i,a,e), LM(i,a,e)] + f^e \quad (19)$$

Sendo: k^e a matriz de rigidez do elemento “e”

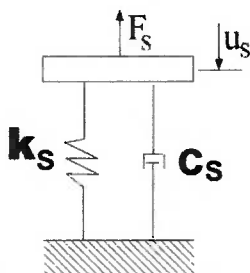
e f^e o vetor carregamentos do elemento “e”

4.8 INCORPORAÇÃO DO SOLO

Definição dos parâmetros do solo:

Para acoplar o solo na análise da estrutura, deve-se considerar o primeiro como uma associação de uma mola e um amortecedor. Desta forma o solo acrescenta rigidez ao sistema. (Carrion, 2002) Como mostra a Figura 4:

Figura 4 – Representação mola-amortecedor do Solo



(Fonte: Carrion, 2002)

O solo está sujeito a uma força de excitação F_s gerada pela estrutura, apresentando um deslocamento u_s .

Podemos representar essa relação a partir da Eq. 20

$$m_f \ddot{u}_s + c_s \dot{u}_s + K_s u_s = F_s \quad (20)$$

Admitindo a fundação sem massa, no domínio da frequência, temos a Eq. 21:

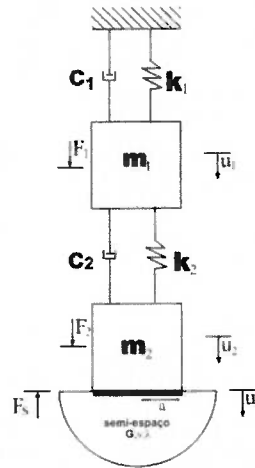
$$Ga \left\{ \underbrace{K_s - \omega^2 \hat{m}_f^0 + \omega c_s i}_{S_s(\omega)} \right\} \cdot \{u_s\} = \{F_s\} \quad (21)$$

Cada tipo de solo possui um módulo de cisalhamento G . O comprimento a é uma característica do projeto e depende do tamanho da base da estrutura colocada em contato com o solo.

O solo possui uma rigidez e um amortecimento, assim como nas estruturas, podendo ser representado por $S_s(\omega)$ que representa a impedância do Solo. Esses dados devem ser fornecidos.

Para representar o acoplamento do solo, utilizaremos a Figura 5 para representar o acoplamento do solo com a estrutura.

Figura 5 – Modelo acoplamento do Solo com Estrutura



(Fonte: Carrion, 2002)

A partir do sistema acima, chegamos as seguintes Eq. 22 e 23:

$$m_1 \ddot{u}_1 + \dot{u}_1(k_1 + k_2) - k_2 u_2 + \dot{u}_1(c_1 + c_2) - c_2 \dot{u}_2 = F_1 \quad (22)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 - k_2 u_1 - c_2 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 = F_2 - F_s \quad (23)$$

Para que o acoplamento dinâmico aconteça, devemos garantir que o deslocamento do solo seja o mesmo que o da estrutura nos nós de acoplamento, para isso a relação a seguir deve ser respeitada:

$$\dot{u}_s = \dot{u}_2 \quad (24)$$

Dessa forma chegamos a seguinte relação de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 \\ -c_2 & +c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + GaS_s(\omega)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

A partir dessa equação do movimento, podemos concluir que o solo influencia na rigidez da estrutura. O solo adiciona um termo de impedância na rigidez relacionada com o grau de liberdade da estrutura.

O acoplamento unidirecional serviu como base para o objetivo do estudo, o acoplamento tridimensional. As respostas dinâmicas na direção X, Y e Z devem estar acopladas com o solo, como mostradas respectivamente nas Eq. 25, 26 e 27.

$$Ga\{S_x(\omega)\} \cdot \{u_x\} = \{F_x\} \quad (25)$$

$$Ga\{S_y(\omega)\} \cdot \{u_y\} = \{F_y\} \quad (26)$$

$$Ga\{S_z(\omega)\} \cdot \{u_z\} = \{F_z\} \quad (27)$$

Assim como na visão unidimensional os deslocamentos do solo devem ser os mesmos das estruturas em cada grau de liberdade, mostrados nas Eq. 28, 29 e 30.

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_x \quad (28)$$

$$\dot{u}_2 = \dot{u}_y \quad (29)$$

$$\dot{u}_3 = \dot{u}_z \quad (30)$$

Dessa forma a matriz de rigidez deve ter a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} + Ga\{S_x(\omega)\} & k_{21} & k_{31} \\ k_{21} & k_{22} + Ga\{S_y(\omega)\} & k_{32} \\ k_{31} & k_{23} & k_{33} + Ga\{S_z(\omega)\} \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que o acoplamento do solo tridimensional também ocorre com um acréscimo da impedância do solo na rigidez do sistema, onde o acoplamento do solo ocorre nos graus de liberdade x, y, z. Alterando diretamente na estrutura.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

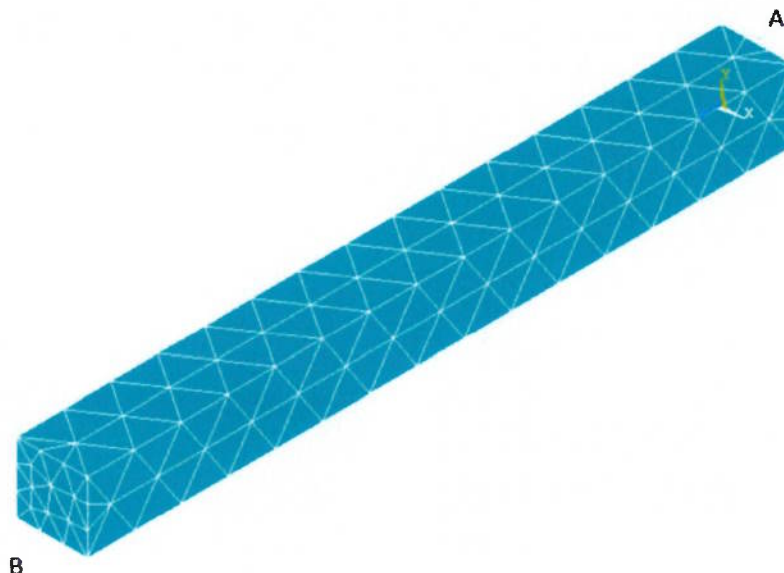
A seguir será efetuada a análise de uma estrutura em formato de barra, composta por elementos tetraédricos, carregada harmonicamente.

Considere a estrutura da Figura 6, com a face engastada na origem (lado A) carregada em sua extremidade (lado B) por três forças harmônicas cujas amplitudes máximas são 200 KN, aplicadas nos eixos X, Y e Z.

Os dados de entrada referentes ao problema em questão devem ser fornecidos pelo usuário. Tais como: Número de nós, coordenadas dos nós, condições de contorno, força de carregamento, número de elementos, Incidência, modulo de Young e coeficiente de poisson.

Serão efetuadas análises com elementos tetraédricos lineares. A geração das malhas é realizada com o auxílio do programa Ansys, com as malhas prontas, podemos prosseguir com a análise no MATLAB®. A malha gerada pelo Ansys pode ser vista na Figura 6

Figura 6 – Viga discretizada em elementos tetraédricos (lado A engastado, lado B livre)



A Tabela 1 indica os dados referentes ao problema:

Tabela 1 – Dados de entrada

Propriedade	Valor
L (m)	5
A (m ²)	0,25
E(N/m ²)	2,1.10 ⁹
I _z (m ⁴)	5,21.10 ⁻³
ρ(Kg/m ³)	7800
A	0,0001
B	0
u(Kg/m ³)	0.2
G(MPa)	144

A força de 200 KN foi distribuída igualmente entre os nós presentes da face livre. Segundo Rao (2008) para o caso do carregamento axial, onde a estrutura se comporta como um elemento de barra engastada tem a Eq. 31 que é a expressão da frequência natural:

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (31)$$

Em que n é a n-ésima frequência natural, E é o Módulo de Young, ρ é a massa específica e L é o comprimento total do elemento.

Para o caso do carregamento transversal na extremidade livre, nos eixos Y e Z, as expressões para as três primeiras frequências naturais são representadas pelas Eq. 32, 33 e 34:

$$\omega_1 = 1,875^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} \quad (32)$$

$$\omega_2 = 4,694^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} \quad (33)$$

$$\omega_3 = 7,855^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} \quad (34)$$

Em que “I_z” é o Momento de Inércia de Área.

Calculando analiticamente os três primeiros valores das frequências naturais em cada um dos três eixos, chega-se nos valores a seguir: $\omega_1 = 163,0$, $\omega_2 = 489,0$ e $\omega_3 = 815,0$ Rad/s para o carregamento axial (eixo X), e $\omega_1 = 10,5$, $\omega_2 = 66,0$ e $\omega_3 = 184,8$ Rad/s para os carregamentos transversais (eixos Y e Z).

Para fazermos a análise de convergência, vamos refinar em um maior número de nós. Para isto, o problema foi discretizado em três malhas, com diferentes níveis de refinamento, conforme mostra a Tabela 2:

Tabela 2- Característica das Malhas

Malha	Número de nós	Número de Elementos
1	203	518
2	280	741
3	485	1529

Resolvendo pelo MEF a Eq.12 englobando os três primeiros valores da frequência natural, a partir da matriz de massa concentrada obtêm-se o gráfico da função resposta em frequência (FRF), ilustradas a seguir. Nas figuras já temos o acoplamento com o solo, e vamos discutir mais a frente.

A seguir serão mostradas nas figuras 7,8 e 9 os resultados provenientes do carregamento externo das três malhas pelo carregamento axial X, nas figuras 10,11,12 os resultados das três malhas pelo carregamento transversal em Y, e nas figuras 13,14,15 os resultados das três malhas pelo carregamento transversal Z. Podemos perceber que os sistemas apresentam picos que tendem ao infinito, sendo esses os pontos da frequência natural do sistema. As figuras apresentam o gráfico da frequência de excitação pelo deslocamento, onde poderemos avaliar os pontos de ressonância.

Figura 7 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em X do nó central da extremidade livre usando a Malha 1

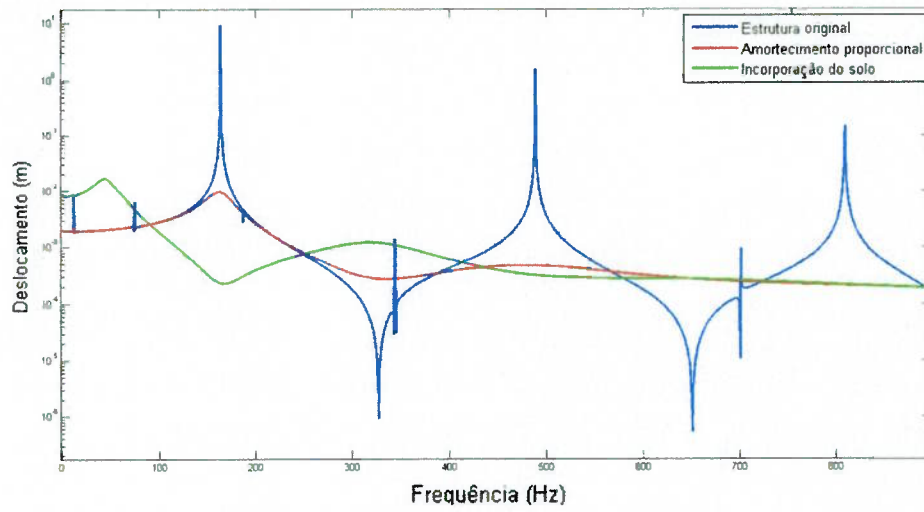


Figura 8 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em X do nó central da extremidade livre usando a Malha 2

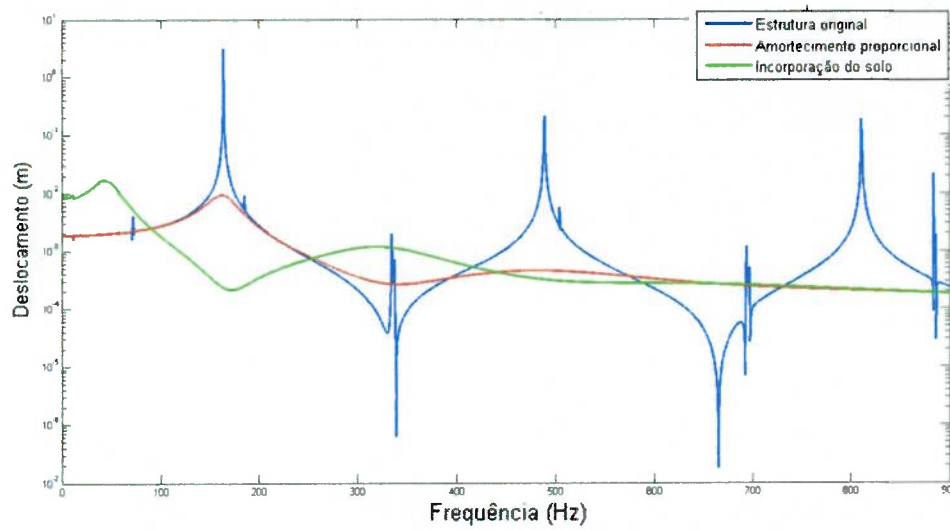


Figura 9 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em X do nó central da extremidade livre usando a Malha 3

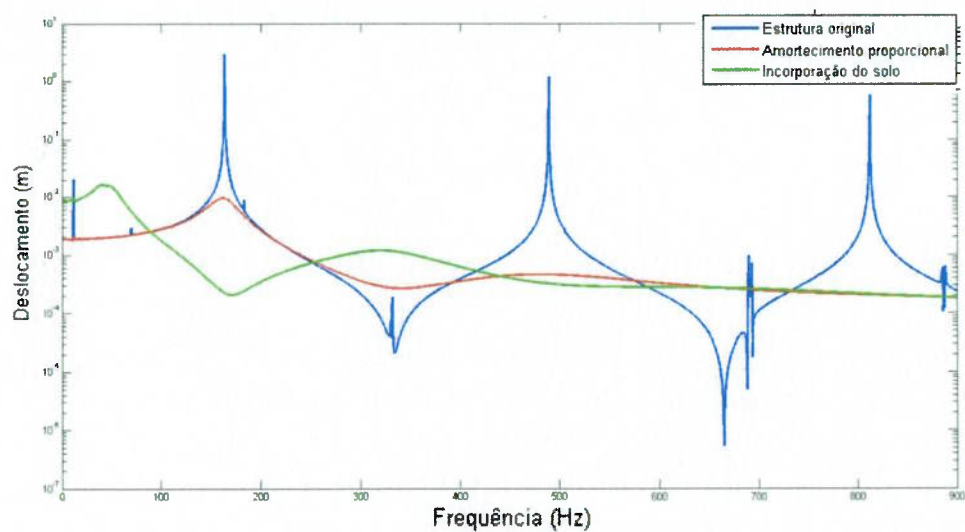


Figura 10 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em Y do nó central da extremidade livre usando a Malha 1

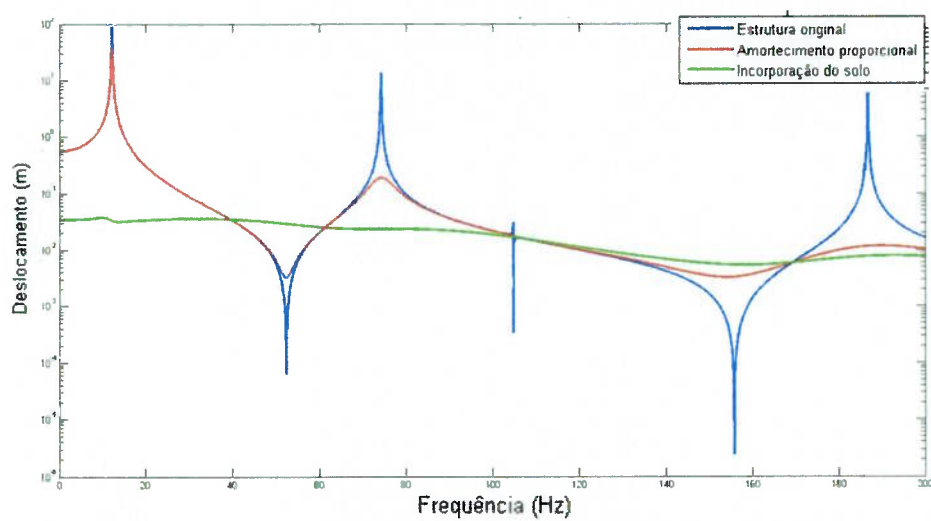


Figura 11 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em Y do nó central da extremidade livre usando a Malha 2

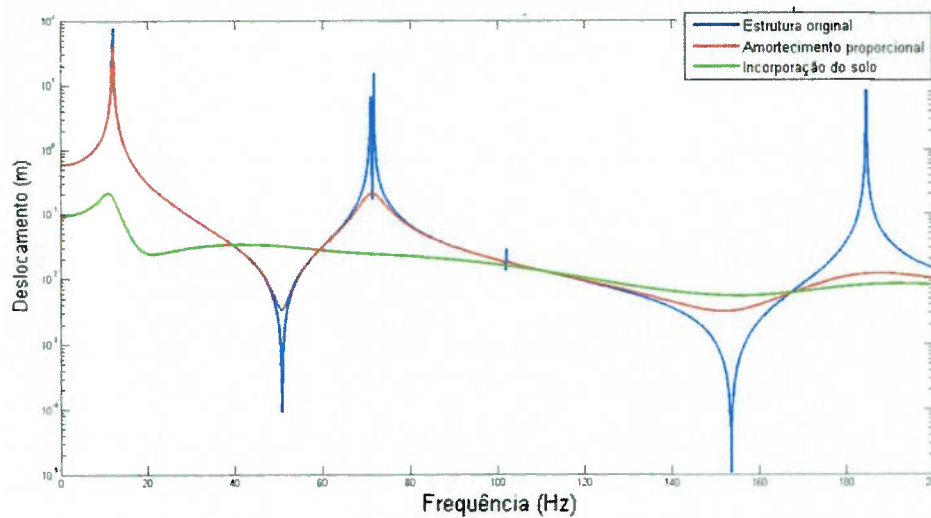


Figura 12 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em Y do nó central da extremidade livre usando a Malha 3

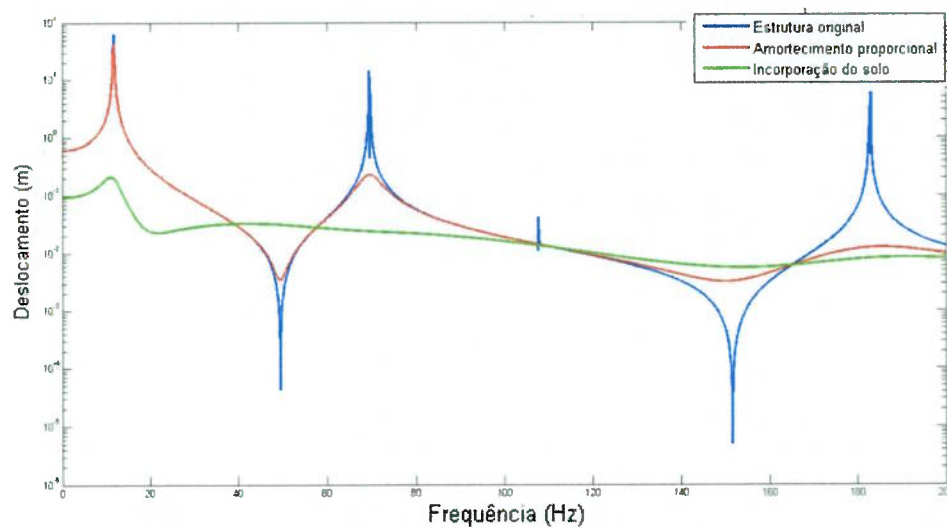


Figura 13 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em Z do nó central da extremidade livre usando a Malha 1

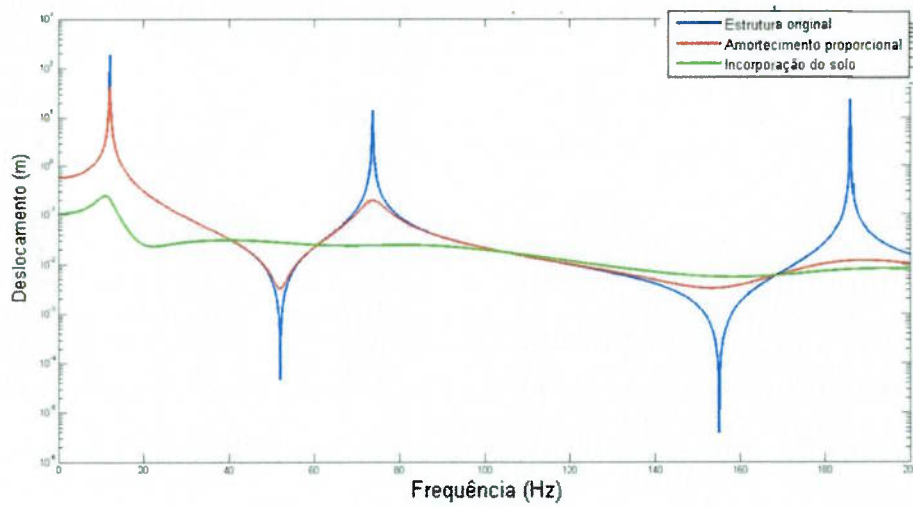


Figura 14 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em Z do nó central da extremidade livre usando a Malha 2

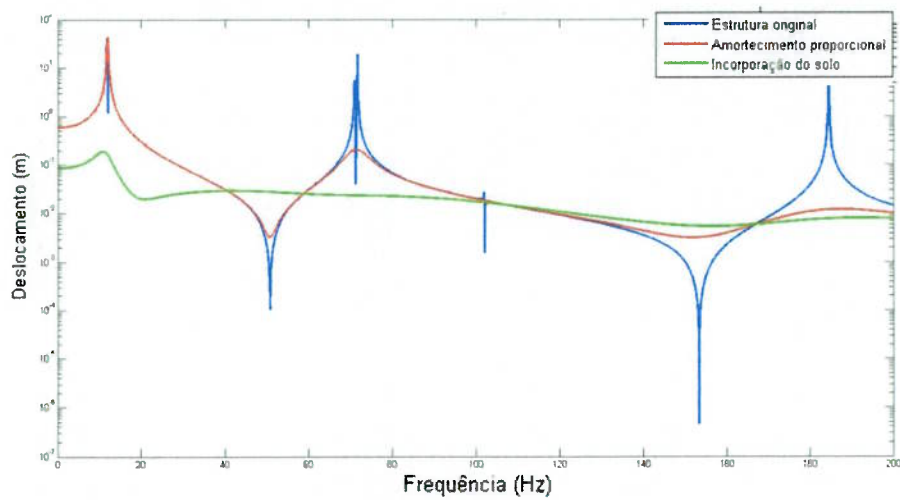
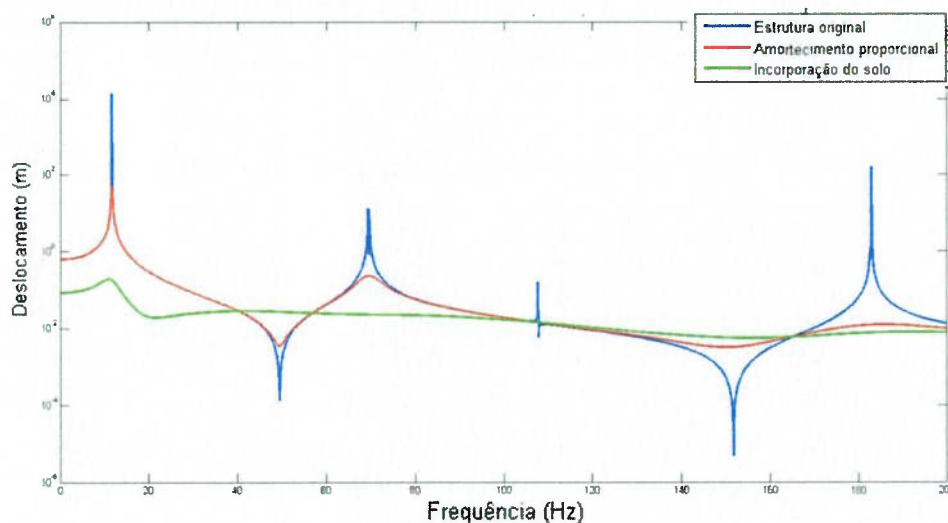


Figura 15 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em Z do nó central da extremidade livre usando a Malha 3



As figuras 10,11,12 representando o grau de liberdade Y e 13,14,15 representando o grau de liberdade Z devem ser bastante semelhantes, entretanto é percebida uma leve diferença devido as coordenadas dos nós não serem exatamente simétricas.

Comparando as três primeiras frequências de ressonância de cada FRF acima calculadas numericamente, com os respectivos valores das frequências naturais dessas estruturas calculadas analiticamente temos, para as direções X, Y e Z os dados das Tabelas 3, 4 e 5.

Tabela 3 - As três primeiras frequências naturais em X do nó central da face carregada obtidas analítica e numericamente

Frequência Natural em X	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
ω_1	163,0	163,3	163,3	163,3
ω_2	489,0	488,7	489,1	489,1
ω_3	815,0	810,0	811,4	812,3

Tabela 4- As três primeiras frequências naturais em Y do nó central da face carregada obtidas analítica e numericamente

Frequência Natural em Y	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
ω_1	10,5	12,2	11,9	11,6
ω_2	66,0	74,2	71,3	69,4
ω_3	184,8	186,8	184,7	183,0

Tabela 5- As três primeiras frequências naturais em Z do nó central da face carregada obtidas analítica e numericamente

Frequência Natural em Y	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
ω_1	10,5	12,1	11,9	11,7
ω_2	66,0	73,7	71,3	69,6
ω_3	184,8	186,0	184,7	183,0

Pode-se notar que os resultados numéricos assemelham-se dos analíticos, principalmente para frequências naturais mais baixas. Quanto maior o refinamento da malha da estrutura, percebe-se que mais o resultado numérico fica próximo do teórico. As tabelas 6, 7 e 8 indicam as frequências naturais quando acopladas ao solo.

Tabela 6 As primeiras frequências naturais com o solo em X do nó central da face carregada obtida numericamente

Frequência Natural em X	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
ω_1	-	44,6	42,8	40,5
ω_2	-	317,3	319,1	319,1
ω_3	-	-	-	-

Tabela 7 As primeiras frequências naturais com o solo em Y do nó central da face carregada obtida numericamente

Frequência Natural em Y	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
ω_1	-	10,1	10,9	11,0
ω_2	-	-	-	-
ω_3	-	-	-	-

Tabela 8 As primeiras frequências naturais com o solo em Z do nó central da face carregada obtida numericamente

Frequência Natural em Z	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
ω_1	-	11,0	10,9	11,0
ω_2	-	-	-	-
ω_3	-	-	-	-

O solo amortece a vibração, comprovados com os dados das tabelas 6,7 e 8, fazendo com que a frequência natural diminua, e diminuindo a amplitude do deslocamento, o objetivo é evitar trabalhar com uma estrutura excitada na frequência igual a frequência natural quando está acoplada com o solo.

6 CONCLUSÕES

O desenvolvimento do código em MATLAB® para analisar o acoplamento do solo em estruturas tetraédricas tridimensionais, utilizando o método dos elementos finitos, foi realizado. Foi possível calcular as frequências naturais da estrutura engastada a uma superfície fixa e sua comparação com o solo, uma superfície elástica. O programa utiliza as teorias de vibrações mecânicas para analisar o comportamento dinâmico da estrutura, calculando suas frequências naturais de vibração e as funções de resposta em frequência de seus deslocamentos.

Analisando pelo ponto de vista clássico, uma estrutura quando excitada no domínio da frequência pode ter sua amplitude tendendo ao infinito caso a frequência natural da estrutura seja igualada com a frequência de excitação. Para a validação do modelo, foi realizada uma comparação em relação as frequências naturais de uma estrutura engastada em uma extremidade e carregada dinamicamente na superfície livre, com um modelo analítico, discretizando em três malhas diferentes. Como esperado, quanto maior a discretização, mais próximo o modelo ficou do caso analítico.

O grande objetivo foi conhecer o comportamento da estrutura quando acoplada ao solo. Os resultados indicaram que o solo atua como um amortecedor dinâmico, atuando sobre a estrutura diminuindo sua amplitude de deslocamento e reduzindo as frequências naturais.

7 REFERÊNCIAS

BITTENCOURT, M.L. **Análise Computacional de Estruturas: com aplicação do Método de Elementos Finitos** – Editora Unicamp, 2010.

BOZDOGAN, K.B.; OZTURK, D.; NUHOGLU, A. **An Approximate Method for Static and Dynamic Analyses of Multi-bay Coupled Shear Walls, The Structural Design of Tall and Special Buildings**, 2009.

CARRION R. **Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Estacionários Tridimensionais em Domínios Abertos e Fechados**. Tese de Doutorado, FEM/UNICAMP., 2002.

CHAKRABARTI, W. K. **Hydrodynamics of Offshore Structures**; Springer-Verlag Publishers, 1987.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**, Prentice-Hall., 1987.

KIM, N. H., SANKAR, B. V. **Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos** - LTC Editora, 2011.

KIRAL, Z., AND KIRAL, B.G. **Dynamic Analysis of a Symmetric Laminated Composite Beam Subjected to a Moving Load with Constant Velocity**, Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2008

LI, Q.S.; YANG, L.F; LI, G.Q. **The Quadratic Finite Element/Strip with Generalized Degrees of Freedom and Their Application**, Finite Elements in Analysis and Design, 2001.

RAO S. **Vibrações Mecânicas** – Editora Pearson Prentice Hall, 2008.

SORIANO, H.L. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas** - Editora Ciência Moderna, 2009.

VAZ, LUIZ ELOY. **Método Dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas** – Editora Elsevier, 2011



Implementação de um código computacional com elementos tridimensionais para análise da interação dinâmica solo-estrutura

Daniel Vasconcelos Rodrigues Alves

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Carrion

Artigo Sumário referente à disciplina PMI1096 – Trabalho de Formatura para Engenharia de Petróleo II – 2º semestre de 2017.

Este artigo foi preparado como requisito para completar o curso de Engenharia de Petróleo na Escola Politécnica da USP. Template versão 2017.

Resumo

O presente estudo analisa uma das aplicações do Método dos Elementos finitos (MEF) dentro da mecânica dos sólidos, sendo que o objetivo é criar um programa que realiza análise tridimensional de problemas dinâmicos da interação solo-estrutura, como por exemplo, a interação de um *riser* com o solo, no domínio da frequência. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é usado para aproximar a solução de equações diferenciais, seu princípio consiste em discretizar o sistema em pequenos subdomínios (elementos finitos), identificando os graus de liberdade e relacionando cada nó da maneira adequada. As técnicas existentes para simular a interação do solo em um meio tridimensional exigem um grande processamento de dados, sendo, portanto esperado que seja utilizado um modelo numérico computacional como a melhor solução para o problema. No presente estudo foi escolhido o programa MATLAB®, já que é um software atende aos requisitos de alto processamento de simulações numéricas de forma eficiente. Os resultados analíticos obtidos para a estrutura sem o solo indicam uma boa confiabilidade do programa, que quanto maior o refinamento da malha, mais próximo o resultado numérico chega do analítico. Em relação ao acoplamento do solo, é percebido um amortecimento dos deslocamentos, além da redução do valor da frequência natural.

Palavras Chave: Elementos Finitos. Solo. Amortecimento. Tridimensional. Análise Dinâmica.

Abstract

The present study analyzes one of the applications of the Finite Element Method (FEM) in Solid Mechanics. The objective is to create a program that performs three-dimensional analyzes of dynamic problems of soil-structure interaction, such as the interaction of a riser with the ground, in the frequency domain. The Finite Element Method (FEM) is used to approximate the solution of differential equations and its principle is to discretize the system in small subdomains (finite elements), identifying the degrees of freedom and relating each node in the proper way. The existing techniques to simulate soil interaction in a three-dimensional environment require a large data processing, so it is expected that a computational numerical model will be used as the best solution to the problem. In the present study the MATLAB® program was chosen, since it is a software that meets the requirements of high numerical simulations efficiently. The analytical results obtained for the structure without soil indicate a good reliability of the program, that the greater the refinement of the mesh, the closer the numerical result comes from the analytic. In relation to the coupling of the soil, it is perceived a damping of the displacements, besides the reduction of the value of the natural frequency.

Keywords: Finite Elements. Soil. Damping. Three-dimensional. Dynamic Analysis.

1. Introdução

Projetos ou problemas de engenharia são mais bem sucedidos na sua execução quanto mais se tem o entendimento do comportamento físico dos materiais e estruturas que os compõem. Segundo Kim (2011) para facilitar este entendimento, são criados modelos matemáticos aproximados que resultam em diversos tipos de equações, as quais, por sua vez, raramente podem ser solucionadas de uma forma fechada, isto é, exata. A fim de resolvê-las de maneira aproximada, são utilizados métodos numéricos entre os quais se destaca o Método dos Elementos Finitos (MEF), amplamente estudado e com excelentes resultados.

No âmbito da Mecânica dos Sólidos, este método é usado para aproximar a solução de equações diferenciais e seu princípio consiste em discretizar o sistema em pequenos subdomínios (elementos finitos), identificando os graus de liberdade de cada nó. Assim, é possível formular as equações que descrevem o comportamento de todos os nós de cada elemento finito e definir o sistema de equações locais. Vaz (2011) indica que posteriormente, podem-se compor os sistema de equações globais e resolvê-lo, obtendo os valores das incógnitas associadas aos graus de liberdade desconhecidos. Como o método utiliza soluções aproximadas, em geral, à medida que se diminui o tamanho de cada elemento finito (aumentando assim a quantidade desses elementos no sistema), mais precisa se torna a solução, convergindo para a solução exata.

Segundo Carrion (2012), existem três abordagens para se obter as equações de elementos finitos de um sistema: método direto, método variacional e método dos resíduos ponderados. Cada um deles possui suas vantagens e limitações. Neste trabalho será utilizada a abordagem do método dos resíduos ponderados, que consiste em aproximar as soluções das equações gerando um erro (ou resíduo) inerente à formulação. Então, este resíduo deve ser ponderado através de uma função (ponderadora), a qual pode ser de várias formas. Aqui será utilizada a forma de Galerkin.

De acordo com Rao (2008), sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincidir com a frequência da excitação externa, ocorre um fenômeno chamado ressonância. Temos diversos exemplos de danos a estruturas causados por ressonância e vibração excessiva na literatura. Devido aos prejuízos causados por essas falhas é extremamente importante conhecer a estrutura, e entender como amortecer a frequência natural de vibração para evitar o colapso.

Segundo Chakrabarti (1987), Uma estrutura offshore pode ser considerada livre para se mover em ondas. Tal estrutura deve ser conectada ao solo por algum meio mecânico, e geralmente os graus de liberdade são restringidos dados os tipos de conexão com o solo. O termo transversal X pode ser considerado a sobre-tensão, os termos transversais Y e Z podem ser o hasteamento, oscilações e balanços provenientes das ondas. Exemplos de estruturas que requerem tal análise de movimento são: torres articuladas, petroleiros ancorados, semisubmersíveis, risers entre outros. Para calcularmos a distribuição de tensões devemos conhecer os deslocamentos da estrutura, isso requer cálculos de deslocamentos a partir de equações não lineares que necessitam de técnicas como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos, para que uma solução seja obtida.

O presente estudo se insere em um contexto onde autores criaram modelos científicos sobre a interação solo/estrutura apenas em duas dimensões, outras pesquisas avaliaram as estruturas em três dimensões porem sem contar com a interação do solo/estrutura. Este trabalho visa conciliar a análise estrutural tri-dimensional com a interação do solo/estrutura através de um código computacional.

O objetivo deste estudo foi avaliar a análise dinâmica da interação solo – estrutura aplicada a problemas tridimensionais e comprovando o amortecimento a partir do solo, através de um código MATLAB®. Realizando a implementação numérica da estrutura por meio do método dos elementos finitos, particularmente o elemento tetraédrico de quatro nós e o acoplamento do solo na estrutura.

2. Metodologia

Para realizar as atividades do projeto, foi necessário um estudo da análise dinâmica, sem e com amortecimento no domínio da frequência, além da estruturação do elemento tetraédrico. Para a estrutura foram desenvolvidas as matrizes de rigidez e massa assim como a organização dos dados de entrada. Por fim foi realizado o acoplamento do solo. Tais processos serão mais detalhados a seguir.

2.1 ANÁLISE DINÂMICA

Segundo Rao (2008) para realizarmos a dedução das equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade utilizando a segunda lei de Newton devemos seguir os seguintes procedimentos: determinação das coordenadas, configuração do sistema em equilíbrio, desenhar um diagrama de corpo livre e por fim aplicar a segunda lei de Newton. E assim chegamos na equação do movimento, que pode ser expressa de maneira matricial segundo a Eq.1

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [C]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F} \quad (1)$$

Em que $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as denominadas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e \vec{x} , $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ e \vec{F} são os vetores de deslocamento, velocidade, aceleração e carregamento externo.

2.2 ANÁLISE DE UM SISTEMA SEM AMORTECIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

No domínio do tempo, a equação do movimento de um sistema sem amortecimento escrito na forma matricial é dado a seguir pela Eq. 2:

$$[M]\ddot{\vec{x}}(t) + [K]\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \quad (2)$$

Propondo-se uma solução mostrada na Eq. 3:

$$\vec{x}(t) = \cos(\omega t) = \text{Re}[\vec{x}e^{i\omega t}] \quad (3)$$

Fazendo os devidos ajustes, chega-se na Eq. 4:

$$\{[K] - \omega^2[M]\} \cdot \vec{x} = \vec{F} \quad (4)$$

Como a Eq. 4 é um sistema linear pode-se realizar a análise Função de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura, onde cada frequência ω obtém um novo vetor deslocamento \vec{x} .

2.3 ANÁLISE DE UM SISTEMA COM AMORTECIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Segundo Rao (2008), por simplicidade, será considerado um sistema especial para o qual a matriz de amortecimento pode ser expressa pela Eq. 5 como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5)$$

Em que α e β são constantes. Esse tipo de amortecimento é conhecido como *amortecimento proporcional* porque $[C]$ é proporcional à combinação linear de $[M]$ com $[K]$.

Substituindo a Eq 5. na Eq 4. e fazendo os devidos ajustes chega-se na Eq. 6

$$\{[K] - \omega^2[M] + \omega(\alpha[M] + \beta[K])i\} \cdot \vec{x} = \vec{F} \quad (6)$$

Em que $\{[K] - \omega^2[M] + \omega(\alpha[M] + \beta[K])i\}$ é a Matriz de Impedância do sistema, $S(\omega)$.

2.4 INCORPORAÇÃO DO SOLO

Para acoplar o solo na análise da estrutura, deve-se considerar o primeiro como uma associação de uma mola e um amortecedor. Desta forma o solo acrescenta rigidez ao sistema. (Carrion, 2002). O solo está sujeito a uma força de excitação F_s gerada pela estrutura, apresentando um deslocamento u_s .

Podemos representar essa relação a partir da Eq. 7

$$m_f \ddot{u}_s + c_s \dot{u}_s + K_s u_s = F_s \quad (7)$$

Admitindo a fundação sem massa, no domínio da frequência, temos a Eq. 8:

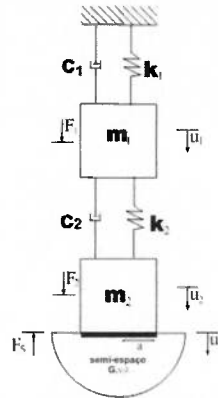
$$Ga \left\{ \underbrace{K_s - w^2 \hat{m}_f^0 + wc_s i}_{S_s(w)} \right\} \cdot \{u_s\} = \{F_s\} \quad (8)$$

Cada tipo de solo possui um módulo de cisalhamento G . O comprimento a é uma característica do projeto e depende do tamanho da base da estrutura colocada em contato com o solo.

O solo possui uma rigidez e um amortecimento, assim como nas estruturas, podendo ser representado por $S_s(w)$ que representa a impedância do Solo. Esses dados devem ser fornecidos.

Para representar o acoplamento do solo, utilizaremos a Figura 1 para representar o acoplamento do solo com a estrutura.

Figura 1 – Modelo acoplamento do Solo com Estrutura



(Fonte: Carrion, 2002)

A partir do sistema acima, chegamos as seguintes Eq. 9 e 10:

$$m_1 \ddot{u}_1 + \dot{u}_1(k_1 + k_2) - k_2 u_2 + \dot{u}_1(c_1 + c_2) - c_2 \dot{u}_2 = F_1 \quad (9)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 - k_2 u_1 - c_2 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 = F_2 - F_s \quad (10)$$

Para que o acoplamento dinâmico aconteça, devemos garantir que o deslocamento do solo seja o mesmo que o da estrutura nos nós de acoplamento, para isso a relação a seguir deve ser respeitada:

$$\dot{u}_s = \dot{u}_2 \quad (11)$$

Dessa forma chegamos a seguinte relação de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + GaS_s(w)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

A partir dessa equação do movimento, podemos concluir que o solo influencia na rigidez da estrutura. O solo adiciona um termo de impedância na rigidez relacionada com o grau de liberdade da estrutura.

O acoplamento unidirecional serviu como base para o objetivo do estudo, o acoplamento tridimensional. Sendo assim a matriz de rigidez deve ter a seguinte forma:

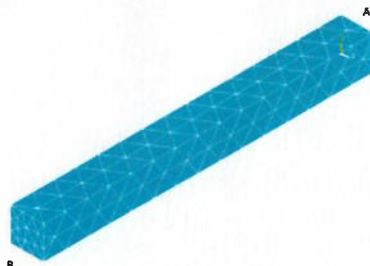
$$\begin{bmatrix} k_{11} + Ga\{S_x(w)\} & k_{21} & k_{31} \\ k_{21} & k_{22} + Ga\{S_y(w)\} & k_{32} \\ k_{31} & k_{23} & k_{33} + Ga\{S_z(w)\} \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que o acoplamento do solo tridimensional também ocorre com um acréscimo da impedância do solo na rigidez do sistema, onde o acoplamento do solo ocorre nos graus de liberdade x, y, z. Alterando diretamente na estrutura.

3. Resultados

A seguir será efetuada a análise de uma estrutura em formato de barra, composta por elementos tetraédricos, carregada harmonicamente. Considere a estrutura da Figura 2, gerada pelo Ansys, com a face engastada na origem (lado A) carregada em sua extremidade (lado B) por uma força harmônica cuja amplitude máxima é 200 kN, aplicada no eixo X.

Figura 2 – Viga discretizada em elementos tetraédricos (lado A engastado, lado B livre)



Segundo Rao (2008) para o caso do carregamento axial, onde a estrutura se comporta como um elemento de barra engastada tem a Eq. 12 que é a expressão da frequência natural:

$$w_n = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (12)$$

Em que n é a n -ésima frequência natural, E é o Módulo de Young, ρ é a massa específica e L é o comprimento total do elemento.

Para fazermos a análise de convergência, vamos refinar em um maior número de nós. Para isto, o problema foi discretizado em três malhas, conforme mostra a Tabela 1:

Tabela 1- Característica das Malhas

Malha	Número de nós	Número de Elementos
1	203	518
2	280	741
3	485	1529

Comparando as três primeiras frequências de ressonância de cada FRF acima calculadas numericamente, com os respectivos valores das frequências naturais dessas estruturas calculadas analiticamente temos, para a direção X os dados da Tabela 2.

Tabela 2 - As três primeiras frequências naturais em X do nó central da face carregada obtidas analítica e numericamente

Frequência Natural em X	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
W1	163,0	163,3	163,3	163,3
W2	489,0	488,7	489,1	489,1
W3	815,0	810,0	811,4	812,3

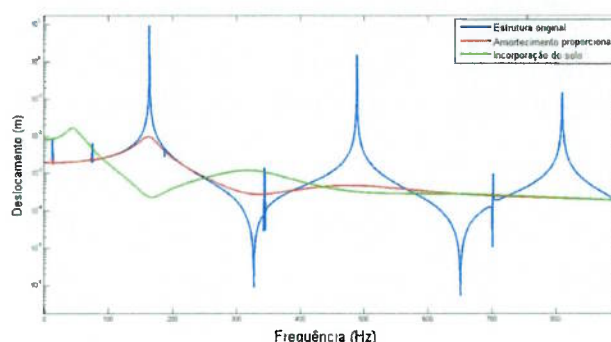
A tabela 3 indica o valor da frequência natural quando a estrutura é acoplada ao solo.

Tabela 3 As primeiras frequências naturais com o solo em X do nó central da face carregada obtida numericamente

Frequência Natural em X	Resultado Analítico (Rad/s)	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 1	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 2	Resultado Numérico (Rad/s) Malha 3
W1	-	44,6	42,8	40,5
W2	-	317,3	319,1	319,1
W3	-	-	-	-

A seguir será mostrada na figura 3 os resultados provenientes do carregamento externo da malha 1 pelo carregamento axial

Figura 3 - Gráfico da FRF de um grau de liberdade em X do nó central da extremidade livre usando a Malha 1



O solo amortece a vibração, comprovados com os dados das Tabelas 2,3 e graficamente pela Figura 3, fazendo com que a frequência natural diminua, e diminuindo a amplitude do deslocamento, o objetivo é evitar trabalhar com uma estrutura excitada na frequência igual a frequência natural quando está acoplada com o solo.

4. Conclusão

O desenvolvimento do código em MATLAB® para analisar o acoplamento do solo em estruturas tetraédricas tridimensionais, utilizando o método dos elementos finitos, foi realizado. Foi possível calcular as frequências naturais da estrutura engastada a uma superfície fixa e sua comparação com o solo, uma superfície elástica. Para a validação do modelo, foi realizada uma comparação em relação as frequências naturais de uma estrutura engastada em uma extremidade e carregada dinamicamente na superfície livre, com um modelo analítico, discretizando em três malhas diferentes. Como esperado, quanto maior a discretização, mais próximo o modelo ficou do caso analítico.

O grande objetivo foi conhecer o comportamento da estrutura quando acoplada ao solo. Os resultados indicaram que o solo atua como um amortecedor dinâmico, atuando sobre a estrutura diminuindo sua amplitude de deslocamento e reduzindo as frequências naturais.

5. Referências

CARRION R. **Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Estacionários Tridimensionais em Domínios Abertos e Fechados**. Tese de Doutorado, FEM/UNICAMP., 2002.

CHAKRABARTI, W. K. **Hydrodynamics of Offshore Structures**; Springer-Verlag Publishers, 1987.

KIM, N. H., SANKAR, B. V. **Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos** - LTC Editora, 2011.

RAO S. **Vibrações Mecânicas** – Editora Pearson Prentice Hall, 2008.

VAZ, LUIZ ELOY. **Método Dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas** – Editora Elsevier, 2011